# Chapitre 8 ; géométrie dans l'espace ; exercices

*On travaille dans un repère orthonormal* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *direct*

## I. Repérage :

Expliquer ce que sont les ensembles représentés par les équations suivantes :

En coordonnées cartésiennes : $a)\ x = x_0 \quad b)\ y = y_0 \quad c)\ z = z_0$

En coordonnées cylindriques : $a)\ r = r_0 \quad b)\ \theta = \theta_0\ ,\ \theta_0 \in ]-\pi, \pi[ \quad c)\ z = z_0$

En coordonnées sphériques : $a)\ \rho = \rho_0 \quad b)\ \varphi = \varphi_0\ ,\ \varphi_0 \in\ ]-\pi, \pi[ \quad c)\ \theta = \theta_0\ ,\ \theta_0 \in ]0, \pi[$

## II. Produit scalaire , vectoriel , mixte

1. Montrer que le triangle ayant pour sommet $A(\sqrt{2}\,;0\,;\,-\sqrt{2}), B(1;\sqrt{2};1) et\ C(-1;-\sqrt{2};-1)$ est isocèle rectangle
2. $A(-3;6;1), B(0;2;3), C(6;6;2) et\ D(3;10;0)$ ; quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
3. $A(3\,;-1\,;-3)\,, B(2\,;1\,;-2)\ et\ C(-2\,;2\,;1)$ ; calculer l'angle $\widehat{BAC}$
4. Soient $\vec{u}(1;3;-1)\ \ et\ \ \vec{v}\,(1;2;0)$

   Calculer une valeur approchée en degré de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

   Calculer l'aire du triangle défini par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
5. *ABCD* est un tétraèdre régulier d'arête *a*. (Chaque face est un triangle équilatéral de côté *a*) ; Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales :
6. $A(3\,;-1\,;-3)\,, B(2\,;1\,;-2)\ et\ C(-2\,;2\,;1)$ ; calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ; que dire de ce vecteur ? Déduire l'aire du triangle $ABC$
7. Soient $\vec{u}(1;-1;0), \vec{v}(0;1;-1)\ et\ \ \vec{w}(-1;0;1)$ ; comparer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ ; que déduire ?
8. $A\,, B\,, C\ et\ D$ sont 4 points d'un même plan tels que $\overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{AB}$

   Déterminer l'ensemble des points de ce plan tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$
9. $O\,, A$ , B et $C$ sont quatre points de l'espace ;prouver la relation :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$$
10. Soient $\vec{u}(-1\,;1\,;1)$ , $\vec{v}\,(3\,;1\,;2)$ et $\vec{w}\,(1\,;1\,;2)$

    Justifier que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

    La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle directe ou indirecte ?

    Quel est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{u}\,, \vec{v}\ et\ \vec{w}$

## III. Droites, plans et sphères

1. Vérifier que les points $A(3\,;2\,;-1)$ , $B(4\,;-1\,;3)$ et $C(-1\,;3\,;2)$ ne sont pas alignés

   Déterminer une équation cartésienne du plan $(ABC)$

2. Soit $D$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$

   Déterminer un point et un vecteur directeur de $D$

   Les points $A(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{19}{2}\,;\,-8)$ et $B\left(\frac{10}{3}\,;\,-5\,;\,\frac{28}{3}\right)$ sont-ils sur $D$ ?

   Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $D$

3. Déterminer une écriture paramétrique du plan $P$ d'équation cartésienne : $x - y + 3z + 2 = 0$

4. Déterminer une écriture paramétrique de la droite $D$ définie par le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

5. $P$ est le plan passant par $A(1\,;-1\,;0)$ et dirigé par $\vec{u}(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}(1\,;4\,;1)$

   $P'$ est le plan passant par $A'(1\,;2\,;1)$ et dirigé par $\vec{u}'(0\,;2\,;-1)$ et $\vec{v}'(1\,;-1\,;3)$

   $D$ est la droite passant par $B(1\,;-1\,;2)$ et dirigée par $\vec{w}(1\,;1\,;2)$

   Montrer que $P$ et $P'$ se coupent suivant une droite $\Delta$ et déterminer un point et un vecteur directeur de $\Delta$

   Déterminer l'intersection de $D$ et de P , puis de $D$ et de $P'$ '

6. On appelle plan médiateur du segment $[AB]$, le plan passant par $I$ milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$

   Montrer que $M$ appartient au plan médiateur du segment $[AB]$ si et seulement si $MA = MB$

7. Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(3\,;-2\,;-5)$ et $B(1\,;4\,;3)$

8. $D$ est la droite passant par le point $A(-1\,;1\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\frac{1}{2};-1;2)$

   Déterminer une représentation paramétrique de la droite $D$

   Déterminer un système d'équation cartésienne de la droite $D$

   Déterminer l'intersection de la droite $D$ et du plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

   Déterminer l'intersection de la droite $D$ et du plan $(O,\vec{\imath},\vec{k})$

9. Soit $(P)$ le plan de parametrage $\begin{cases} x = 2 + \alpha + \beta \\ y = 1 - \alpha + 2\beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ ; déterminer par plusieurs méthodes

   l'équation cartésienne de $(P)$

10. Soit $D$ et $D'$ les droites de représentation paramétrique respective :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = 2 - \frac{t}{4} \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

Justifier que ces droites $D$ et $D'$ ne sont pas coplanaires

11. Soient $P$ et $Q$ les plans d'équation cartésienne respective :

$$x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + 2z + 1 = 0$$

Justifier que $P$ et $Q$ sont sécants

$P$ et $Q$ sont-ils perpendiculaires

Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $d(M, P) = d(M, Q)$

12. Calculer la distance du point $A(1\,;2\,;-1)$ au plan $(BCD)$ avec B(1 ;1 ;0) , C(-1 ;0 ;1) et D(0 ;2 ;1)

13. Calculer la distance du point $A(1\,;2\,;3)$ à la droite $D\ :\ \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

14. Déterminer l'intersection du plan d'équation cartésienne : $x + 2y + z - 5 = 0$ et de la droite définie par : $\begin{cases} -x + 3y + z - 2 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

15. Soit $D$ la droite passant par $A(2\,;-1\,;1)$ et dirigée par $\vec{u}(-1\,;2\,;1)$ et la droite $D'$ passant par $B(0\,;2\,;1)$ et dirigée par $\vec{v}(2\,;-3\,;1)$

Justifier que $D$ et $D'$ ne sont pas coplanaires

Déterminer la perpendiculaire commune à $D$ et à $D'$

16. La configuration du toit

$P$ , $Q$ $et$ $R$ sont trois plans d'équation cartésienne respective :

$$3x - 4y + 7z - 11 = 0 \quad ; \quad x + 2y - z + 1 = 0 \quad ; \quad -2x - 19y + 17z - 5 = 0$$

Déterminer $P \cap Q \cap R$

Justifier que ces trois plans ne sont pas parallèles deux à deux

Déterminer $D_1 = P \cap Q\,;\ D_2 = P \cap R\ \ et\ \ D_3 = Q \cap R$

Que peut-on dire de $D_1\,;\ D_2\ \ et\ \ D_3$ ?

17. $A(0\,;0\,;2)$ , $B(-1\,;2\,;1)\ et\ C(-1\,;2\,;5)$ sont trois points de l'espace

Déterminer l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

Déterminer l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

18. On considère les ensembles :

$$(\Gamma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + \frac{5}{2} = 0$$

$$(\Gamma_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$$

$$(\Gamma_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 8 = 0$$

$$P_1 : x + 2y - z - 2 = 0$$

$$P_2 : 3x - y + 2z + 10 = 0$$

$D$ la droite passant par $A(-1\,;-3\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1\,;-2)$

Reconnaitre et caractériser les ensembles : $(\Gamma_1)$ , $(\Gamma_2)$ , $(\Gamma_3)$ , $(\Gamma_1) \cap P_1$ , $(\Gamma_2) \cap P_2$ et $(\Gamma_3) \cap D$

19. Dans l'espace, on considère un triangle $ABC$

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right).\left(2\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB}\right) = 10$

20. Soient $(P) : 2x - y + z - 3 = 0 \quad et \quad (P') : x + y + 2z - 7 = 0$ ; calculer l'angle $\widehat{(P;P')}$

21. Déterminer le projeté orthogonal de $A(1;-1;5)$ sur le plan $(P): x + 2y + 2z - 14 = 0$ , puis le symétrique de A par rapport à (P)

22. Quelle est la distance du point $A(14;-2;5)$ au plan $(P): 3x + 2y - 6z + 7 = 0$ ? Ce point A est-il du même coté du plan que l'origine O ?

23. Soient $A(1;-1;5)$ et $(P) : x - y + 3z - 2 = 0$ ; Donner une représentation paramétrique de la perpendiculaire en A à (P)

# Exercices de fin de chapitre

1. $A$ , $B$ , $C$ et $D$ sont quatre points de l'espace deux à deux distincts tels que (AB) et (DC) soient sécantes en I
   Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$

2. On donne $A(0\,;4\,;-1)$ , $B(-2\,;4\,;-5)$ , $C(1\,;1\,;-5)$ $et$ $D(1\,;0\,;-4)$

   Montrer que les points $A$ , $B$ , $C$ $et$ $D$ ne sont pas coplanaires

   Déterminer les plans médiateurs des segments $[AB]$ , $[BC]$ $et$ $[AD]$

   Déterminer l'intersection $I$ des ces plans

   Prouver que $I$ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$

   Déterminer l'équation de cette sphère

3. Soit S la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ de rayon $R$ , et soit $H(x_0\,; y_0\,; z_0)$ un point de $S$

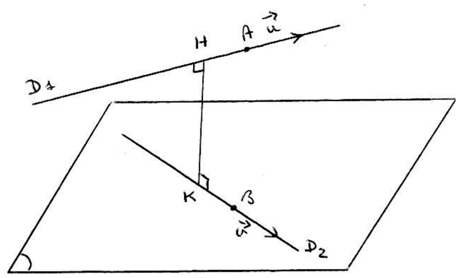
   Déterminer une équation du plan tangent à $S$ au point $H$

4. On travaille dans un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

   On se propose dans cet exercice de calculer la distance entre deux droites $(D_1)$ $et$ $(D_2)$ non coplanaires, c'est-à-dire la distance $HK$ où la droite $(HK)$ est la perpendiculaire commune aux droites $(D_1)$ $et$ $(D_2)$ (voir dessin)

   $(D_1)$ passe par A et est dirigée par le vecteur $\vec{u}$

   $(D_2)$ passe par B et est dirigée par le vecteur $\vec{v}$




   a) Etablissement de la formule :

      Justifier que le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal aux deux droites $(D_1)$ $et$ $(D_2)$

      En utilisant la relation de Chasles, prouver que $\left|\overrightarrow{AB} .\ \vec{n}\right| = HK\,.\,\|\vec{n}\|$

      Déduire que $HK = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

   b) Application numérique : calculer la distance $HK$ , lorsque
      $\begin{cases} A(1; 2; 3) \ \ et \ \ \vec{u}\,(3; -1; 2) \\ B(5; 0; -2) \ et \ \ \vec{v}(-1; 3; 2) \end{cases}$